Propriétés

Soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ d'affixes respectives z et z' dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Si z et z' ont pour formes trigonométriques : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, Alors :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$.
- $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$.

A, B, C et D étant des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe de repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

c) Ecriture exponentielle

Notation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée notation exponentielle.

Propriétés

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad$ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\quad$ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad$ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les formules d'addition :
  $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les formules de duplication :
  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- On peut vérifier que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les formules d' **EULER**.
- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée formule de **MOIVRE**.

Exercice 8

On considère les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1°) Donner la forme exponentielle de Z.
2°) Donner les formes algébriques de z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de Z.
3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Activités 3, 4et 6 pages 15 et 16.
Exercices : 17, 18, 19, 21, 22, 23 pages 20 et 21.